Chapitre n° 8

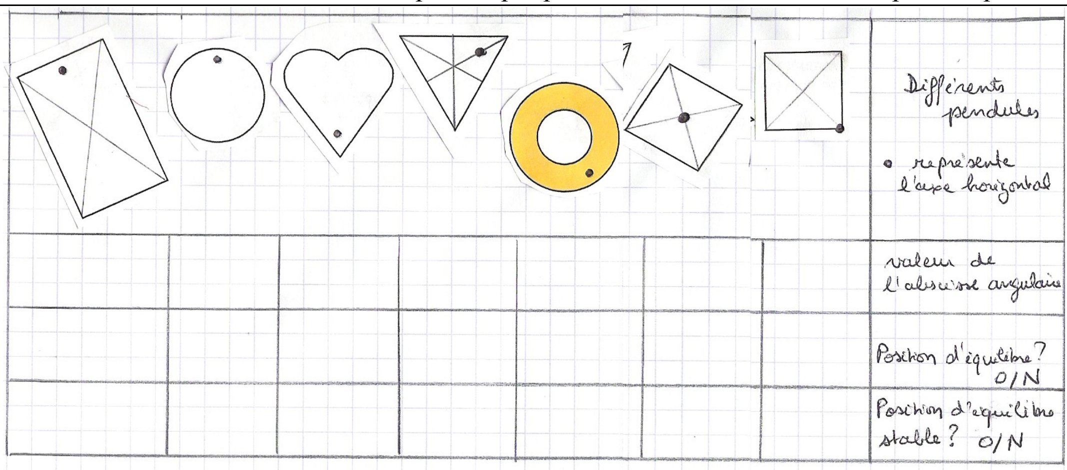
Systèmes mécaniques oscillants

I Les pendules

1) Le pendule pesant

a) Définition

Un solide mobile autour d'un axe horizontal Ox ne passant pas par son centre d'inertie G est un pendule pesant.



b) Ecart angulaire, positions d'équilibre, stabilité de l'équilibre

La position du pendule est définie entièrement par la donnée d'une seule variable qui correspond à l'angle orienté $(\vec{g};\overrightarrow{OG})$ où O correspond à l'axe de rotation et G le centre d'inertie du pendule. Cet angle algébrique noté θ est appelé
.

Le pendule est **à l'équilibre** quand $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$: la droite (OG) a une direction verticale.

On distingue : - la **position d'équilibre** correspondant à $\theta = 0$: G en dessous de O.

- la **position d'équilibre** correspondant à $\theta = \pi$: G est au dessus de O.

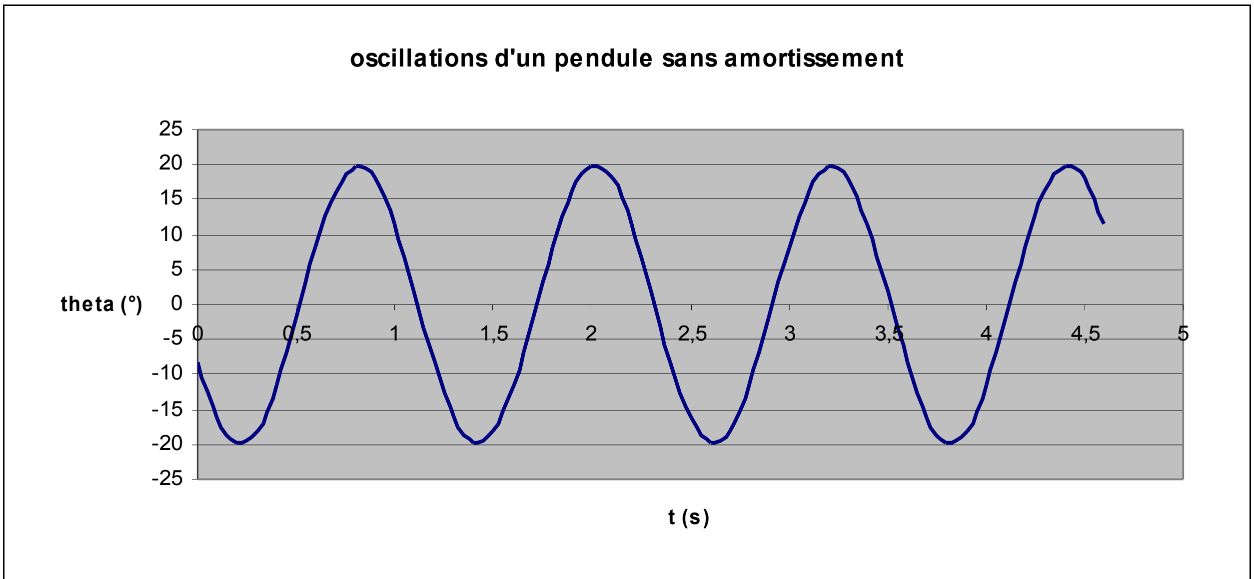
c) Pendule pesant en mouvement

Le pendule, lâché sans vitesse hors de sa position d'équilibre, se met en mouvement.

- *S'il n'y a pas d'amortissement*, l'abscisse angulaire est une fonction périodique du temps, évoluant entre deux valeurs extrêmes $+\theta_m$ et $-\theta_m$. θ_m est appelée **amplitude du mouvement**. La période T_0 des oscillations est appelée

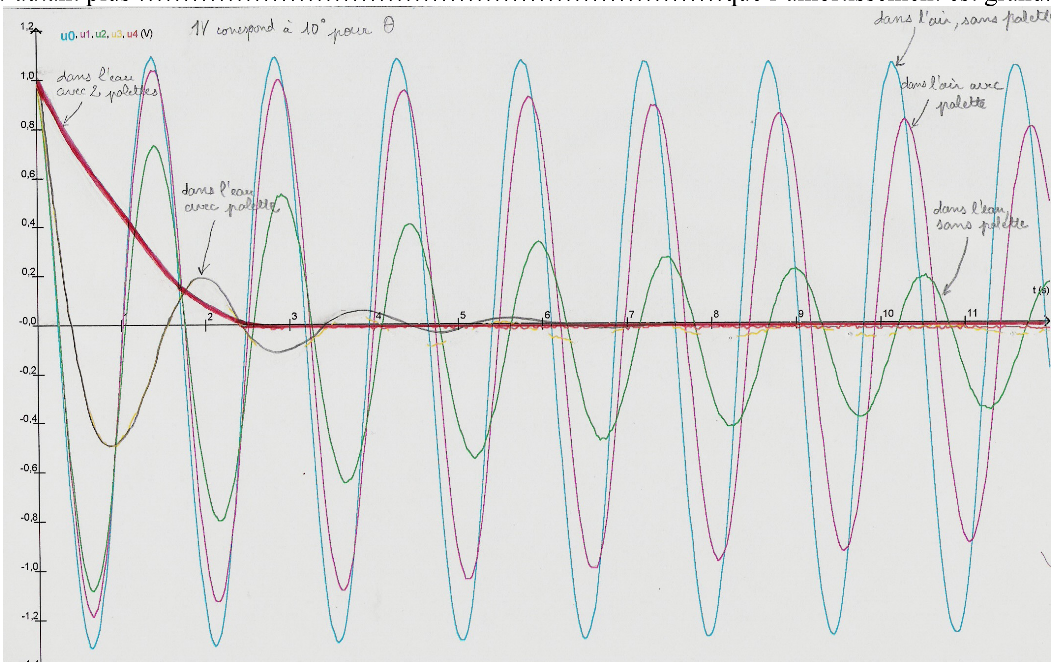
du pendule pesant.

Rappel : pour déterminer T_0 à partir d'un enregistrement, ……………………………………………………………………….…
………………………………………………………………………



- *S'il y a des amortissements* (dus aux frottements de l'air ; pour les augmenter, on peut rajouter une « palette ») : voir TP pendule pour un enregistrement à l'oscilloscope. On distingue *deux régimes* :

- Régime …………………………………………quand l'amortissement est relativement faible. On définit un temps caractéristique appelé ………………………………………, notée T, durée ……………………………………………… séparant deux passages consécutifs et dans le même sens, de l'abscisse angulaire θ . T reste proche de T_0 tant que l'amortissement est faible ; Elle s'en éloigne (est supérieure) quand l'amortissement augmente.
- Régime …………………………………………quand l'amortissement est fort : il n'y a plus d'oscillations, l'amplitude s'annule d'autant plus …………………………………………………………que l'amortissement est grand.



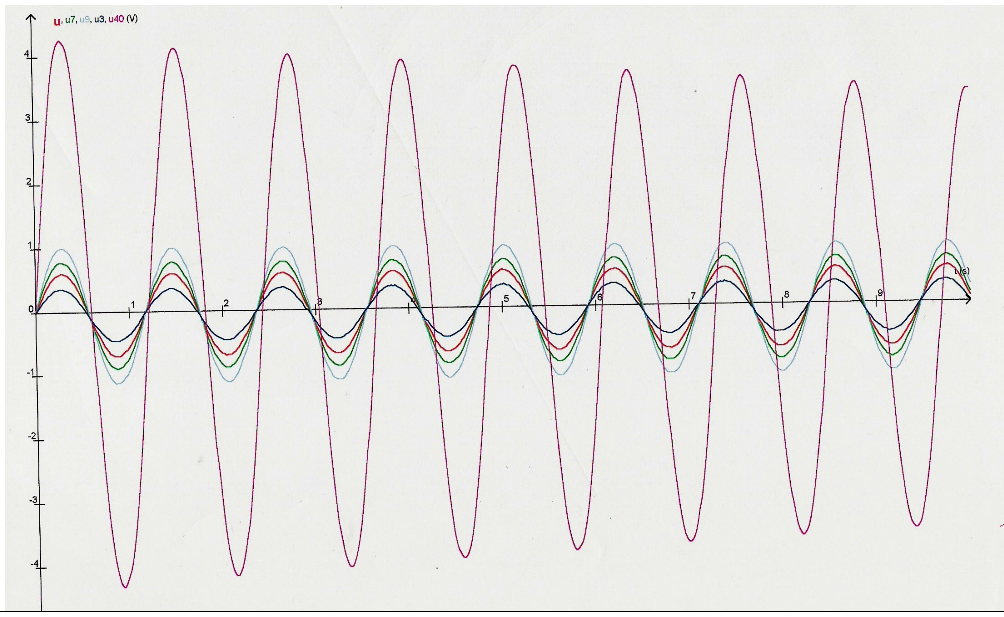
d) De quoi dépendent T_0 et T ?

On peut penser que T_0 et T dépendent des paramètres suivants :

- Masse du pendule : paramètre ……………….
- Longueur OG :
-
-
- …

Résultats à retenir pour le pendule pesant :

Plus l'amortissement est grand, plus T est grand. (amortissement nul : $T = T_0$)



Pour des valeurs de θ_m inférieures à 15° environ, la période T_0 est indépendante de l'amplitude θ_m . C'est **la loi d'isochronisme des petites oscillations**. Elle reste vraie si l'amortissement est faible en substituant T_0 par ……….. .

2) Un pendule très particulier : le pendule simple

a) Définition

Un pendule simple est constitué d'un objet ponctuel (càd de la grandeur d'un point) de masse m suspendu à un point fixe par un fil inextensible de longueur l et de masse nulle.

Le pendule simple est un objet virtuel car :

- Un objet ponctuel de masse m n'existe pas,
- Un fil inextensible
-

On réalise un objet approché en utilisant un fil léger rigide soutenant une masse dont le rayon est très inférieur à la longueur du fil.

b) Position d'équilibre

Démontrons que la position d'équilibre d'un pendule simple correspond à $\theta = 0$.

Le pendule est matérialisé par la masse de valeur m. Il est soumis à deux forces :

- Son poids $\vec{P}$ de direction verticale, dirigé vers le bas,
-

c) Expression de la période propre

La période propre T_0 du pendule simple (sans amortissement) peut a priori dépendre des paramètres suivants :

- Masse m du pendule : paramètre……………………
- Longueur l : paramètre…………………………
- Amplitude θ_m
- …

Quelles expériences réaliseriez-vous pour mettre en évidence, ou non, l'influence de ces paramètres sur la période du pendule simple ?

Pourquoi mesurer 10 oscillations plutôt qu'une ? Pourquoi ne pas e mesurer 100 avec le matériel fourni ?

A quel moment faire démarrer le chronomètre ? Pourquoi ?

Influence de la masse :

Influence de l'amplitude : la loi d'isochronisme des petites oscillations reste valable : la période du pendule simple est indépendante de l'amplitude à condition que celle-ci reste inférieure à 15° environ.

Influence de la longueur l

l (cm)	15	20	25	30	35	40
T(s)	0,78	0,91	1,02	1,09	1,20	1,26

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$: quel(s) graphique(s) permettrai(en)t facilement de mettre en évidence cette loi ? Construisez-les sur papier millimétré et en déduire g.

La période dépend de ℓ. On montre théoriquement que

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad \ell \text{ en m, g en N.kg}^{-1} \text{ et T en s}}$$

Montrons par analyse dimensionnelle que l'expression de T_0 a bien la dimension d'un temps.

II Le système « masse-ressort »

1) Rappels : force exercée par un ressort sur un mobile

- direction : celle du ressort
- sens : opposé à la déformation du ressort
- intensité : proportionnelle à l'allongement du ressort dans le cas d'un ressort à réponse linéaire. Le coefficient de proportionnalité noté k est appelé constante de raideur du ressort. En notant l la longueur du ressort et l_0 sa longueur à vide,

  F =

- point d'application : point de contact ressort-mobile.

2) Etude statique du système vertical

Soit un mobile (appelé souvent « masse » de façon abusive) de masse m pendue à un ressort de longueur à vide l_0. Le ressort se détend et sa longueur vaut l lorsque la masse ne bouge plus.

L'étude se fait dans le référentiel terrestre assimilé galiléen. Le système est la « masse » suspendue au ressort. Elle est soumise aux forces extérieures suivantes :

D'après la deuxième loi de Newton,

En prenant un repère vertical orienté vers le haut, l'origine coïncidant avec l'extrémité inférieure du ressort quand celui-ci n'est relié à aucune force, on peut écrire :

On peut en déduire la valeur k de la constante de raideur du ressort

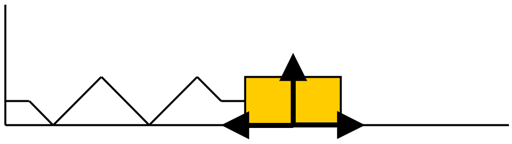
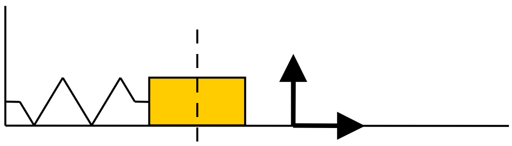
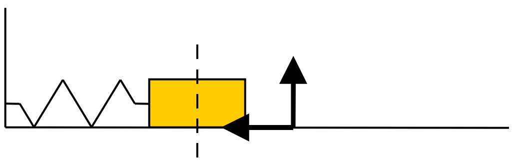
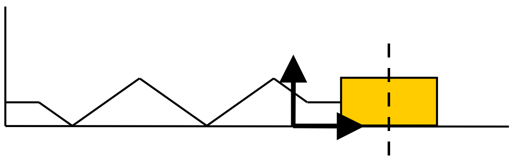
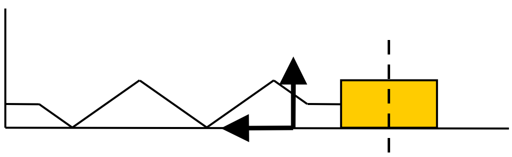
3) Etude dynamique du système horizontal : « pendule élastique horizontal »

a) Equation différentielle générale

Le mobile est relié au ressort horizontal. Elle est en mouvement horizontal sur une table sans frottement solide de la part de cette dernière (surface parfaitement lisse). L'étude se fait dans le système terrestre assimilé galiléen. Le système est le mobile. Il est soumis aux forces extérieures suivantes :

D'après la deuxième loi de Newton,

Expression vectorielle de la force subie par le mobile de la part du ressort :

Situation. Placer O, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et G et son abscisse x Le premier dessin correspond à l'équilibre : ressort ni étiré, ni comprimé	Signe de x	$\lvert l - l_0 \rvert$ en fonction de x	$\lVert \vec{F} \rVert = F$ en fonction de k et x	Sens de $\vec{F}$	Sens de $\vec{i}$	$\vec{F}$ en fonction de F et $\vec{i}$	$\vec{F}$ en fonction de k, x et $\vec{i}$
Equilibre : $\lvert l - l_0 \rvert$ =0 (sens de i au choix) 							
							
							
							
							

Conclusion :

Appliquons pour trouver notamment l'équation régissant le mouvement horizontal :

b) Résolution de l'équation différentielle sans frottement

L'équation différentielle précédente s'écrit alors :

Vérifions que la fonction $x(t) = X \times \cos(\frac{2\pi}{T_0} t + \phi_0)$ où X, T_0 et ϕ_0 sont des constantes vérifie cette équation différentielle avec obligatoirement $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

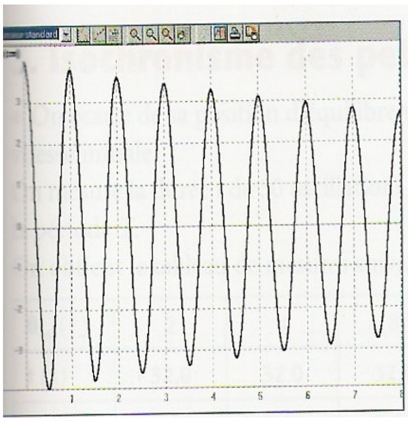
c) Période propre T_0 de l'oscillateur élastique horizontal

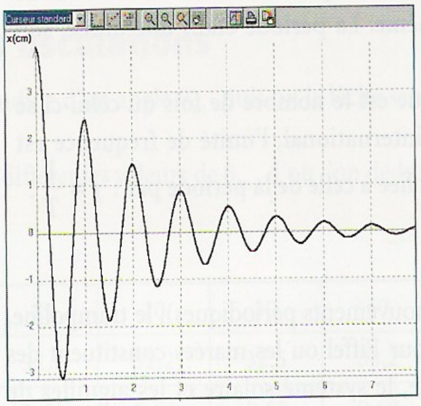
$T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$	T_0 en

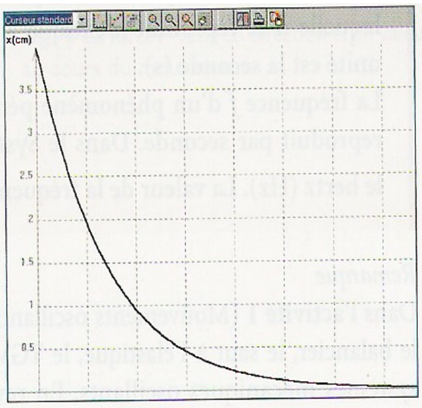
d) Cas où il y a présence de frottements dus au fluide entourant le mobile.

Les frottements vont être à l'origine d'un amortissement progressif des oscillations. Dans l'équation différentielle, cela se traduit par un terme en plus faisant intervenir ……………………………….

Avec les conditions initiales x(t=0) = x_0 (= x_{max}) et v(t=0) = 0, on obtient les profils suivants pour les variations de x en fonction du temps :







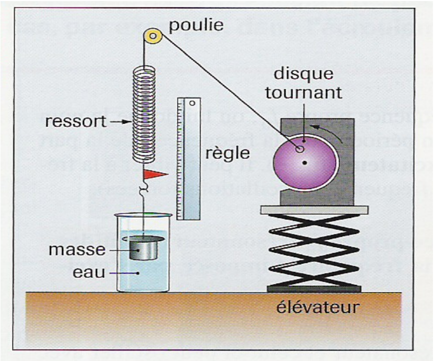
- **Régime……………………………….**quand l'amortissement est relativement faible. On définit un temps caractéristique appelé **…………………………………………..…….**, notée T, durée (invariante) séparant…………………………...
……………………………………………………………………………………………………….. T reste proche de T_0 tant que l'amortissement est faible ; Elle s'en éloigne (est supérieure) quand l'amortissement augmente.
- **Régime……………………………….**quand l'amortissement est fort : il n'y a plus d'oscillations, l'amplitude s'annule d'autant plus ……………………………….. que l'amortissement est grand.

Remarque : les amortissements ne sont pas toujours néfastes et sont parfois recherchés afin de stopper les oscillations. C'est le rôle des amortisseurs de voiture. Afin que le véhicule, à la suite d'une secousse due à un corps étranger sur la route, n'oscille trop longtemps, on l'équipe d'amortisseurs qui vont amortir ces oscillations. La valeur de l'amortissement doit être calculée de manière à ce que les essieux retrouvent leur état d'équilibre au plus vite : il faut donc choisir la valeur de l'amortissement qui correspond au régime………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………………..
On règle les amortisseurs pour obtenir effectivement ce régime.

III Phénomène de résonance

1 Oscillations forcées

Lorsqu'on soumet un pendule à une excitation, à une de ses extrémités, possédant une certaine fréquence, le pendule va suivre ce mouvement excitateur et va se mettre à osciller avec la même fréquence (et donc la même période) que celle de l'excitation. Cette fréquence peut être choisie tout à fait différente de la fréquence propre (correspondant à la période propre) de l'oscillateur. L'oscillateur est soumis à la fréquence excitatrice. Il n'évolue plus librement en oscillant avec sa période…...……, on dit qu'il subit des oscillations…………



2 Exemple de mise en œuvre

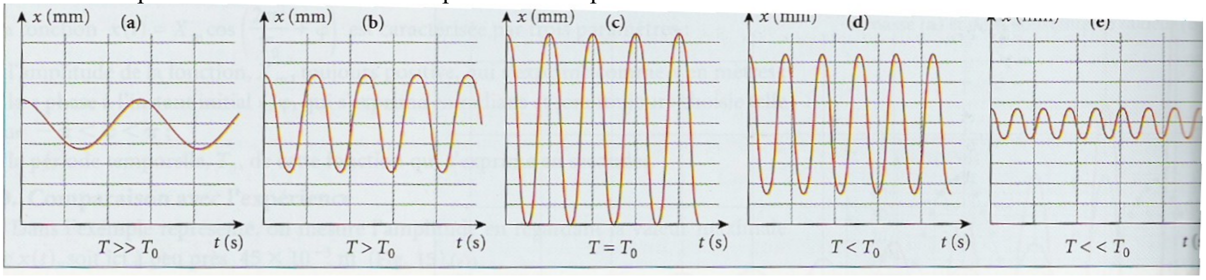
L'utilisation d'un moteur tournant entraînant un excentrique permet la mise en vibration forcée du pendule élastique horizontal.

C'est le moteur qui impose la fréquence d'excitation, on l'appelle……………
.

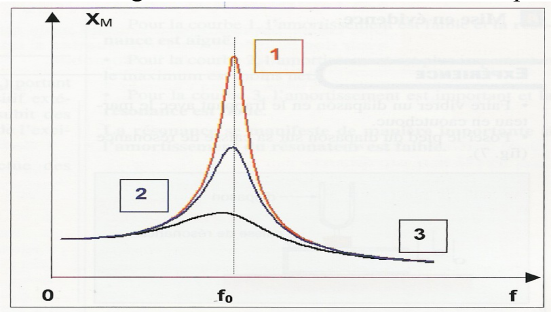
C'est le pendule qui subit la fréquence excitatrice, on l'appelle………………..

3 Résonance

En faisant varier la période excitatrice, on s'aperçoit que le résonateur réagit différemment : l'amplitude de ses oscillations dépend de cette période excitatrice :



Sur le document suivant, on a reporté l'amplitude du mouvement en fonction de la fréquence excitatrice et ceci pour trois valeurs de l'amortissement (l'amortissement grandit de la courbe 1 à la courbe 2 puis à la courbe 3) :



Conclusions de ces documents :

4 Exemples de résonance mécanique dans la vie courante

a) Effets désirés du phénomène de résonance

De nombreux instruments de musique utilisent le phénomène. Ainsi, la mise en vibration de la corde d'un instrument à crde, lorsqu'elle est reliée à une cavité résonante, va pouvoir mettre en vibration cette cavité.

Excitateur : Résonateur :

Un adulte poussant un enfant sur une balançoire ne va pas le faire à un rythme quelconque auquel cas la balançoire n'aurait pas une grande amplitude.

Excitateur : Résonateur :

b) Effets néfastes du phénomène de résonance

Un pont suspendus est toujours relativement flexible et possède une fréquence propre. Lorsqu'il et soumis à des rafales de vent qui possèdent une fréquence voisine, il peut rentrer en résonance. Les amplitudes atteintes peuvent être à l'origine de sa dégradation.

Le même phénomène peut se réaliser quand une troupe marche en cadence sur un pont. Celui-ci peut rentrer en résonance et subir des dommages en s'écroulant avec la troupe (accident sur le pont d'Angers en 1860 : 200 noyés). Depuis 1860, les militaires ont l'interdiction de marcher au pas sur un pont.