Méthode d’Euler

Fiche n°

I Utilisation de la méthode d’Euler

La méthode d’Euler permet la résolution d’équations différentielles du premier ordre donc **faisant intervenir une fonction et sa dérivée.**

C’est une **méthode de résolution numérique** : la solution de l’équation différentielle n’est pas donnée sous la forme d’une fonction mathématique (avec une variable comme f(x) = 3x + 2) mais sous la forme des valeurs prises par la fonction (par exemple f(0) = 0 ; f(0,5) = 3,2 ; f(1) = 6,7 ; f(1,5) = 15,8 etc.)

La méthode est **itérative** : les valeurs prises par la fonction sont calculées de proche en proche : on calculera d’abord f(0) et la valeur trouvée nous permettra de trouver f(0,5) qui permettra de trouver f(1) etc.

Quand utiliser cette méthode ?

Cette méthode n’est pas aussi puissante, bien sûr, que la résolution théorique de l’équation différentielle. On l’emploie quand il suffit d’avoir les valeurs de la fonction et non son expression en fonction de x (les ordinateurs fonctionnent comme cela). Et bien plus important, on l’emploie quand il n’existe pas de solution analytique de l’équation différentielle, ce qui est très fréquent.

II Principe de la méthode d’Euler

1 Construction de proche en proche

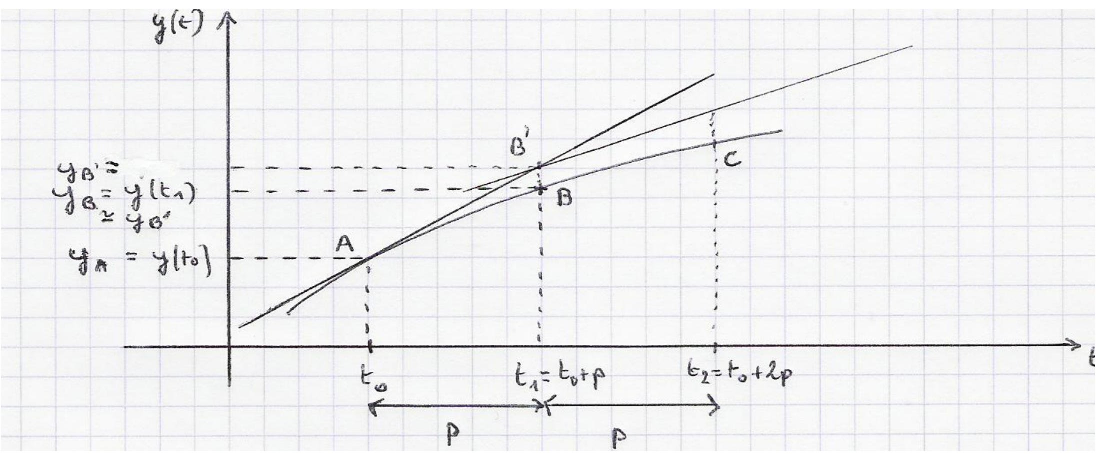
a) Obtention de $y(t_i+p)$ connaissant $y(t_i)$ et $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=t_i}$

Connaissant la valeur $y(t_0) = y_0$ d’une fonction y(t) en $t = t_0$ ainsi que celle de sa dérivée $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=t_0}$ il est possible de donner une très bonne valeur approchée de $y(t_1) = y_1$ de la fonction y en $t = t_1 = t_0 + p$ où p est « relativement petit ».

En effet, on peut assimiler la courbe représentant y en fonction de t, sur l’intervalle $[t_0 ; t_1]$ par la tangente à cette courbe au point A de coordonnées $(t_0, y(t_0))$. Cette droite a pour coefficient directeur $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=t_0}$ par définition géométrique de la dérivée de y en t_0. L’ordonnée $y(t_1)$ du point B appartenant à la courbe et d’abscisse t_1 est sensiblement égale à l’ordonnée du point B’ appartenant à la tangente et d’abscisse t_1.

On peut donc écrire que $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=t_0} = \dfrac{y_{B'} - y_0}{t_1 - t_0} \approx \dfrac{y_B - y_0}{t_1 - t_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{p}$

Et donc en tirer y_1 : $y_1 \approx$



De façon générale, on obtient donc la relation suivante appelée **relation d’Euler ou approximation affine tangente** :

y_i (= $y(t_i)$) =

b) Obtention de $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_i}$ **connaissant y(t_i)**

C'est l'équation différentielle du premier ordre en y qui va alors nous permettre de calculer la valeur de $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_i}$ .connaissant y(t_i) puisqu'elle relie les fonctions $\frac{dy}{dt}(t)$ et y(t).

c) Et finalement …

Connaissant y(t_0) = y_0 et $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_0}$, on va pouvoir calculer y(t_1) = y(t_0 + p) = y_1 puis $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_1}$, puis donc y(t_2) = y(t_1 + p) = y_2 et alors $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_2}$ etc. De proche en proche, on peut calculer les valeurs de y en t_0 + p, t_0 + 2p, t_0 + 3p etc.

2 Pas d'itération

p est appelé le **pas d'itération**.

On remarque que la solution de la fonction y donnée par la méthode d'Euler n'est pas exacte. La solution sera d'autant plus juste que le pas d'itération choisi p sera ________________

III Conclusion

Pour appliquer la méthode d'Euler, il faut connaître la valeur de y et de sa dérivée en t_0. Puis on utilise les formules, l'une après l'autre : - donnant la valeur de y(t_{i+1}) en fonction de y(t_i) et de $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_i}$ (utilisation de la relation d'Euler) - donnant la valeur de $\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_i}$ connaissant y(t_i) (utilisation de l'équation différentielle)

IV Exemples d'utilisation de la méthode d'Euler en Sciences Physiques:

Population N(t) d'atomes radioactifs qui se désintègrent progressivement	Tension aux bornes d'un condensateur pendant sa décharge	Vitesse v(t) qui atteint une vitesse limite lors d'une chute verticale avec force de frottements fluides
$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$	$\frac{du_c}{dt} = -\frac{1}{RC}u_c$	$m\frac{dv_G}{dt} = mg' - kv_G{}^n$ Soit $\frac{dv_G}{dt} = g' - \frac{k}{m}v_G{}^n$ (g > g' intensité apparente de la pesanteur)