Précision et chiffres significatifs

Fiche n°

I Signification d'une mesure physique

1 Exemple

Mesurez la longueur d'une feuille A4 avec une règle **graduée en cm**. Vous trouverez une longueur qui s'approchera davantage de la graduation 30 cm que de la graduation 29 cm. La longueur mesure donc 30 cm avec cette méthode.

Mesurez cette même longueur avec une règle **graduée en mm**. Vous trouverez une longueur qui s'approchera davantage de la graduation 297 mm que 296 ou 298 mm. La longueur mesure donc 297 mm soit 29,7 cm avec cette méthode. Cette méthode est plus précise puisque le résultat possède un chiffre en plus. La première méthode donnait la longueur cherchée avec deux chiffres significatifs, la seconde avec 3 chiffres significatifs.

2 Signification

Ecrire que L = 30 cm est tout aussi juste que d'écrire que L = 29,7 cm mais est moins précis.

L = 30 cm signifie en fait que L est plus proche de 30 cm que de 29 cm ou de 31 cm. Dire que L = 30 cm signifie donc en réalité que L est encadrée par :

$$29{,}5 \text{ cm} < L < 30{,}5 \text{ cm} \qquad (1)$$

$$\text{soit } 30-0{,}5 \text{ cm} < L < 30+0{,}5 \text{ cm}$$

où 0,5 cm correspond à une demi graduation de l'instrument utilisé et est appelée « erreur absolue » faite sur la mesure.

L = 29,7 mm signifie en fait que L est plus proche de 29,7 cm que de 29,6 cm ou 29,8 cm. Dire que L = 29,7 cm signifie donc en réalité que L est encadrée par :

29,65 cm < L < 29,75 cm (0,05 cm est la demi graduation de l'instrument utilisée et l'erreur absolue).

Ainsi, de façon plus générale, il est admis qu'écrire par exemple c = 1,54 mol.L^{-1} signifie que

$$1{,}535 \text{ mol.L}^{-1} < c < 1{,}545 \text{ mol.L}^{-1}.$$

3 Conversions

Si L=30 cm, on peut convertir L en m en donnant une valeur qui soit compatible avec l'encadrement (1) correspondant à 30 cm. On ne peut écrire que L = 0,3 m sinon cela voudrait dire que 0,25 m = 25 cm < L < 0,35 m = 35 cm, encadrement beaucoup plus grand que (1).

On est obligé d'écrire L = 0,30 m afin de garder le même encadrement, en gardant ainsi le même nombre de chiffres significatifs que 30 cm, **les zéros à droite faisant partie des CS, les zéros à gauche n'en faisant pas partie, peu importe la place éventuelle d'une virgule.**

II Règles de calcul

1 Encadrements

a) Exemple 1

La concentration d'une solution c est donnée par la formule : $c = c'*V_1/V_2$. On sait de plus que c' = 0,015 mol.L^{-1}, V_1 = 15,3 mL et V_2 =32,0 mL. Donner l'encadrement de c', V_1 et V_2 et finalement de c :

		mol.L^{-1}	<	c'	<		mol.L^{-1}	
		10^{-3} L	<	V_1	<		10^{-3} L	
		10^{-3} L	<	V_2	<		10^{-3} L	
d'où	1/(	10^{-3}) L^{-1}	<	$1/V_2$	<1/(	10^{-3})	L^{-1}	
et finalement		mol.L^{-1}	<	$c'*V_1/V_2$	<		mol.L^{-1}	(2)

soit l'encadrement suivant pour l'inconnue c :

mol.L^{-1}	<	c	<	mol.L^{-1}	

b) Exemple 2

On sait que $d_1 = d_2 - d_3$, que d_2 = 254,867m et que d_3 = 2,3 mm. Donner l'encadrement de d_2, d_3 et finalement de d_1 :

	mm<	d_2	<	mm	
	mm<	d_3	<	mm	
	mm<	$-d_3$	<	mm	
soit	mm<	d_1	<	mm	(3)

Il faudrait procéder continuellement par encadrements pour chaque calcul si on voulait être rigoureux. Cependant, c'est bien long. Les physiciens ont mis au point des règles de calcul pour prendre en compte ces problèmes de précision et gagner du temps.

2 Règle pour un calcul avec multiplications et divisions

Règle 1 : dans le cas d'un calcul avec uniquement multiplications et divisions, on fait le calcul demandé avec les valeurs données mais on garde, pour le résultat final, un nombre de CS correspondant au nombre de CS de la donnée qui en possède le moins.

On appliquera également cette règle, en terminale, dans le cas des fonctions sinus, log, exp etc.

Cela donne pour c : $c = 0{,}015 * 15{,}3.10^{-3}/32{,}0.10^{-3} = 0{,}00717187\ldots\ mol.L^{-1}$

La donnée qui possède le moins de CS est c' qui n'en possède que 2 (les autres en possède 3) donc on ne garde pour c que 2 CS. Ainsi $c = 0{,}0072\ mol..L^{-1}$. **ATTENTION AUX ARRONDIS** !

Cela signifie qu'on admet que

$$0{,}00715\ mol.L^{-1} < c < 0{,}00725\ mol.L^{-1}$$

ce qui n'est pas en parfait accord avec l'encadrement (2) qui lui est exact : $0{,}00689937\ldots mol.L^{-1} < c < 0{,}00744679\ldots\ mol.L^{-1}$. (vérifiez votre résultat de la page précédente)

Le nouvel encadrement est même plus précis alors qu'il devrait être moins précis que (2) pour être valide !

Conclusion : la règle énoncée n'est pas correcte en toute rigueur. Cependant, elle est mieux que rien et il faut l'appliquer.

3 Règle pour un calcul avec additions et soustractions

Règle 2 : dans le cas d'un calcul avec uniquement additions et soustractions, on fait le calcul en entier et on rogne le résultat final en s'arrêtant au chiffre (avec arrondi) dont le rang correspond au rang le moins précis des derniers chiffres des données.

Le dernier chiffre de d_2 (le « 7 ») correspond au rang des mm tandis que le dernier chiffre de d_3 (le « 3 ») correspond au rang des dixièmes de mm. On rognera ainsi d_1 au rang des mm.

$d_1 = 254867 - 2{,}3 = 254864{,}7$. On garde $d_1 = 254865$ mm. **ATTENTION AUX ARRONDIS** !

Cela signifie qu'on admet que

$$254864{,}5\ mm < d_1 < 254865{,}5\ cm$$

ce qui n'est pas en parfait accord avec (3) qui lui est exact : $254864{,}15\ mm < d_1 < 254865{,}25$ mm (vérifiez votre résultat)

Le nouvel encadrement est même plus précis que (3) du côté gauche alors qu'il ne devrait surtout pas l'être !

Conclusion : la règle énoncée n'est pas correcte en toute rigueur. Cependant, elle est mieux que rien et il faut l'appliquer.

ATTENTION à ne pas appliquer la règle n°1 pour les calculs d'additions ou de soustractions ! On risquerait d'arriver à des aberrations ! (reprendre l'exemple étudié avec la mauvaise règle pour s'en convaincre…)

4 Et pour un calcul mêlant les quatre opérations ?

Il faut procéder par étapes en commençant par les calculs les plus internes et en utilisant les deux règles précédentes suivant le type d'opérations rencontrées. Cependant, il convient de ne pas faire de calculs et d'arrondis intermédiaires qui risqueraient de fausser encore plus le résultat final.

III Erreur absolue, erreur relative

Soit V la valeur d'une grandeur physique trouvée expérimentalement **ou** lors d'un calcul théorique, valeur qui doit s'approcher d'une valeur de référence notée $V_{réf}$.

L'erreur **absolue** commise **sur $V_{réf}$ par V** est

$$e_{absolue} = |V_{réf} - V|\ (= |V - V_{ref}|)$$

$e_{absolue}$ a pour unité celle de $V_{réf}$ et V. $e_{absolue}$ doit toujours faire apparaître **des barres de valeur absolue**.

L'erreur **relative** commise sur V_{ref} par V correspond à l'erreur absolue faite **par rapport** à la valeur de V_{ref} . Il s'agit donc du **rapport** suivant :

$$e_{relative} = \frac{e_{absoue}}{V_{réf}} = \frac{|V_{ref} - V|}{V_{ref}}$$

$e_{relative}$ n'a pas d'unité et est souvent donnée sous la forme d'un pourcentage.