Mesures et incertitudes – Fiche 4 : Estimation de l'incertitude-type expérimentale sur une mesure obtenue à l'issue de la mise en œuvre d'un protocole présentant plusieurs sources d'erreurs indépendantes (de type B)

Dans la fiche n°3, nous avons appris à déterminer l'incertitude-type associée à une source d'erreur identifiée sur une mesure, liée au matériel ou à la méthode utilisée. Cependant il est fréquent que le protocole mis en œuvre présente plusieurs sources d'erreurs, il faut donc apprendre à déterminer une incertitude sur le résultat final de la mesure qui tienne compte de toutes ses sources d'erreurs.

Mais dans de nombreux cas, il sera judicieux d'identifier une source prédominante qui imposera l'incertitude au résultat final.

I. Evaluation de l'incertitude sur un résultat lié à une unique mesure comportant plusieurs sources d'erreurs indépendantes

1. Evaluation de l'incertitude-type sur la mesure

Lorsqu'on effectue une mesure avec un appareil il n'y a pas toujours qu'une seule source d'erreur. C'est le cas par exemple de la mesure du volume équivalent d'un titrage colorimétrique à l'aide d'une burette. Les sources d'erreur liées à l'instrument (tolérance, résolution) s'ajoutent à la source d'erreur liée à la méthode.
En considérant que ces erreurs sont indépendantes, alors l'incertitude-type sur la mesure du volume équivalent n'est pas la somme des incertitudes-types associées aux sources d'erreurs, mais la racine de la somme des carrés.

Soient n sources d'erreurs indépendantes sur une mesure de la grandeur X dont les incertitudes-types associées sont noté $u_i(X)$ (avec $i = 1$ à n). Alors l'incertitude-type sur X vaut :

$$u(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i(X)^2}$$

Exemple : mesure d'un volume équivalent $V_E = 19{,}8$ mL à l'aide d'une burette graduée à 0,1 mL près, de tolérance $a = 0{,}05$ mL, la méthode introduisant une erreur sur la lecture du volume équivalent de $\Delta V_E = 0{,}1$ mL

Les trois sources d'erreurs sont associées à une loi de probabilité rectangulaire de largeur respective $\delta = 0{,}1$ mL, $2a = 0{,}1$ mL et $\Delta V_E = 0{,}1$ mL. Les incertitudes-types valent donc respectivement :

$$u_{\text{résolution}}(V_E) = \frac{\delta}{\sqrt{12}} \ ; \ u_{\text{tolérance}}(V_E) = \frac{2a}{\sqrt{12}} \ ; \ u_{\text{tolérance}}(V_E) = \frac{\Delta V_E}{\sqrt{12}}$$

L'incertitude-type sur V_E vaut donc :

$$u(V_E) = \sqrt{u_{\text{méthode}}(V_E)^2 + u_{\text{tolérance}}(V_E)^2 + u_{\text{résolution}}(V_E)^2}$$

$$u(V_E) = \sqrt{\left(\frac{\delta}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{2a}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V_E}{\sqrt{12}}\right)^2} = 0{,}05 \text{ mL}$$

L'incertitude-élargie à 95 % sur V_E vaut donc : $U_{95\,\%}(V_E) = 2 \times u(V_E) = 0{,}1$ mL

V_E mesuré avec un niveau de confiance à 95 % : $V_E = 19{,}8 \pm 0{,}1$ mL

2. Identification d'une source prédominante

Analysons les trois exemples suivants, on suppose que les erreurs liées au matériel sont similaires mais seul l'erreur liée à la méthode change

- $\Delta V_E = 0{,}1$ mL : les trois incertitudes-types sont identiques, il n'y a donc pas de source d'erreur prédominante, et il faut effectuer le calcul complet si l'on souhaite être rigoureux
- $\Delta V_E = 0{,}5$ mL

L'incertitude-type associée à l'erreur sur la méthode est supérieur aux autres. Calculons l'incertitude-type sur V_E de manière rigoureuse, puis en supposant que seule l'erreur sur la méthode est présente.

$$u(V_E) = 0{,}150 \text{ mL} \ ; \ u_{\text{méthode}}(V_E) = \frac{\Delta V_E}{\sqrt{12}} = 0{,}144 \text{ mL}$$

Les valeurs calculées sont différentes, si nous gardons deux chiffres significatifs pour l'incertitude élargie on obtient deux valeurs différentes :

$$U_{95\%}(V_E) = 0{,}30 \text{ mL} \ ; \ U_{95\%,\,\text{méthode}}(V_E) = 0{,}29 \text{ mL}$$

Mais si nous ne gardons qu'un chiffre significatif pour l'incertitude élargie on obtient dans les deux cas :

$$U_{95\%}(V_E) = U_{95\%,\,\text{méthode}}(V_E) = 0{,}3 \text{ mL}$$

- $\Delta V_E = 1$ mL

L'incertitude-type associée à l'erreur sur la méthode est supérieur aux autres. Calculons l'incertitude-type sur V_E de manière rigoureuse, puis en supposant que seule l'erreur sur la méthode est présente.

$$u(V_E) = 0{,}292 \text{ mL} \ ; \ u_{\text{méthode}}(V_E) = \frac{\Delta V_E}{\sqrt{12}} = 0{,}289 \text{ mL}$$

Les valeurs calculées sont différentes, si nous gardons deux chiffres significatifs pour l'incertitude élargie on obtient :

$$U_{95\%}(V_E) = U_{95\%,\,\text{méthode}}(V_E) = 0{,}58 \text{ mL}$$

A retenir :

Dans le cadre de sources d'erreurs indépendantes sur une même mesure, si l'incertitude-type d'une des sources est 10 fois plus grande que celles des autres sources, alors on considérera qu'elle est prédominante et on effectuera l'approximation suivante : $u(X) = u_{\text{source prédominante}}(X)$

II. Evaluation de l'incertitude sur un résultat lié à une grandeur calculée à partir de plusieurs grandeurs mesurées

1. Formule de propagation des incertitudes

Lorsqu'une grandeur est déterminée par un calcul faisant intervenir plusieurs grandeurs mesurées dont les erreurs sont indépendantes alors on peut déterminer l'incertitude-type sur cette grandeur par une formule de propagation des incertitudes.

La formule générale de propagation des incertitudes est donnée ci-dessous. Elle fait intervenir des opérateurs mathématiques que vous ne connaissez pas encore (les dérivées partielles).

Si Y est une grandeur qui se calcule à partir de grandeurs mesurées X_i ($i = 1$ à k) par la relation :

$$Y = f(X_1, \dots, X_k)$$

et si les sources d'incertitude sont indépendantes, on a alors la relation suivante (appelée relation de propagation d'incertitudes)

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 (X_i) \times u(X_i)^2}$$

Dans le cas général on pourra utiliser l'outil informatique pour effectuer le calcul (logiciel GUM_MC), mais très souvent la relation entre les différentes grandeurs est assez simple et la relation de propagation d'incertitudes se simplifie alors :

Relation entre Y et les X_i	Formule de propagation
$Y = \alpha X$ où α est une constante	$u(Y) = \alpha u(X)$
$Y = \alpha X_1 \pm \beta X_2$	$u(Y) = \sqrt{\alpha^2 u^2(X_1) + \beta^2 u^2(X_2)}$ On obtiendra une formule similaire avec n termes
Si $Y = X_1 X_2$ ou $Y = \frac{X_1}{X_2}$	$\frac{u(Y)}{Y} = \sqrt{\left(\frac{u(X_1)}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{u(X_2)}{X_2}\right)^2}$ Incertitude relative = racine de la somme des incertitudes relatives On obtient une formule similaire avec n termes

Remarque : les sources d'erreurs ne sont en réalité pas toujours indépendantes et dans ce cas les calculs sont beaucoup plus complexes et dépassent le cadre du programme. Nous effectuerons toujours l'approximation qu'elles le seront.

2. Identification d'une source prédominante

Il peut s'avérer très utile avant tout calcul de propagation d'incertitudes de déterminer si une source d'incertitude est prédominante devant les autres, ainsi le calcul se simplifie car il suffit de ne tenir compte que de cette incertitude. Pour comparer des sources d'incertitudes entre elle il faut comparer les incertitudes relatives :

$$\frac{u(X_i)}{\widehat{x_i}}$$

On ne compare par les incertitudes-types entre elles car elles ne sont pas associées aux mêmes grandeurs mesurées. Cela permet de comparer des pourcentages d'erreur entre eux.

A retenir :

Dans le cadre d'une grandeur calculée à partir de grandeurs mesurées indépendantes, si l'incertitude-type relative d'une des grandeurs est 10 fois plus grande que celles des autres grandeurs, alors on considérera qu'elle est prédominante et on pourra négliger les autres dans les calculs

Remarque : plusieurs sources peuvent être prédominantes, dans ce cas on négligera toutes les autres en ne gardant que celles-ci dans le calcul de propagation des incertitudes.

3. Application

Nous appliquerons ceci lors de l'analyse des titrages acido-basiques en travaux pratiques.