Chapitre 6

Les gammes

Des nombres et encore des nombres ! Dans ce chapitre, vous allez comprendre pourquoi la musique faisait partie intégrante des mathématiques dans l'enseignement de l'antiquité grecque. Les quatre premières pages sont à préparer avant le TP chez vous. Donc à vos neurones et vos calculatrices !

I Préliminaires et définitions

1) Calculs sur les fréquences émises par des cordes vibrantes.

On considère une corde de longueur L comme partie vibrante, de masse linéique μ et tendue avec une tension F. Redémontrer la valeur théorique de la fréquence f du son émis par cette corde (nous l'avons corrigé en classe avec toutes les étapes donc c'est l'occasion de voir si vous savez le refaire très proprement).

On considère la même corde mais dont on a réduit la longueur de la partie vibrante de moitié : L'=L/2. Montrer que la nouvelle fréquence du son émis alors par la corde est le double de la fréquence précédente : f'/f = 2

Ce rapport correspond à un intervalle nommé octave. Toutes les civilisations (des 5 continents) ont toujours trouvé qu'entendre deux notes avec une octave de différence en même temps correspond à un accord particulièrement harmonieux. On dit que les notes sont consonantes (c'est une des spécificités de l'humanité entière). L'octave est donc la base de toute gamme.

2) La suite des « la »

Le la_3 a pour fréquence 440 Hz (aux US). Calculer les fréquences exactes du la_4, la_5 etc. jusqu'au la_8 (on multiplie par des 2 à chaque fois pour ajouter une octave ascendante), puis du la_2, la_1 etc. jusqu'au la_{-1} (on divise par deux à chaque fois pour les octaves descendantes).

la_{-1}				la_3					
			220 Hz	440 Hz	880 Hz				

Placer ces notes sur un axe légendé et graduée avec une graduation de 0 à 20000 Hz. On prendra comme échelle 1cm pour 1000 Hz :

Attention ! Sur un piano, deux « la » consécutifs sont espacés par la même distance. Est-ce le cas en ce qui concerne les fréquences sur cet axe ? Non. ***Pour augmenter d'un certain intervalle, quand on parle en fréquences, il faut multiplier par la valeur de cet intervalle et non ajouter une valeur. De même pour trouver l'intervalle entre deux notes, il ne faudra pas faire une soustraction mais un quotient.***

3) Définition d'une gamme

Ne jouer qu'avec des intervalles correspondant à des octaves (donc par exemple que des « la ») serait extrêmement ennuyeux. Les différentes civilisations ont donc intercalé d'autres notes entre chaque la, le même nombre pour chaque octave. Le nombre de notes intercalées et leurs fréquences respectives constituent une gamme. Nous étudierons dans ce chapitre quelques gammes de la civilisation occidentale, utilisées en Europe avec son apogée à partir du XV^{ème} siècle. Le patrimoine musical ainsi élaboré (partitions, instruments, musiciens, logiciels de musique, concerts, salles de concerts etc.) depuis près de 5 siècles est absolument unique dans l'Univers. La musique chinoise ou la musique indienne ne se basent pas sur les mêmes gammes que l'Europe. Elles viennent les compléter et sont souvent plus riches mais plus difficiles à entendre si l'oreille n'y a pas été exercée depuis l'enfance.

4) Attention ! Attention ! Une erreur à ne pas commettre

Dire par exemple qu'entre le la_0 et le la_1 (donc entre 55Hz et 110 Hz), il y a « moins de place » pour placer des notes (écart de 55 Hz) qu'entre le la_4 et le la_5 (écart de 880 Hz) est TOTALEMENT FAUX : il y a une infinité de nombre réels entre 55 et 110 et une infinité de nombres réels entre 880 et 1760, la deuxième « infinité » n'étant absolument pas 16 fois plus grande que la première. Autrement dit, en langage parlé, il y a bien autant de place pour placer le nombre de notes que l'on désire entre le la_0 et le la_1 qu'entre le la_4 et le la_5.

II Gamme pythagoricienne

1) Bases de construction

Reprendre la corde de longueur L du I 1). On décide cette fois de la faire vibrer mais non plus à la moitié mais au 2/3 pour obtenir ainsi une longueur vibrante L''=(2/3)*L. Le son émis a alors une fréquence égale à f''. Calculer le rapport f''/f ainsi obtenu.

Alors que le rapport 2 de fréquence entre deux notes correspond à un intervalle nommé **octave**, le rapport 3/2 (=1,5) correspond à un intervalle nommé **quinte pure**. Ce nouvel intervalle est moins agréable que l'octave mais reste extrêmement harmonieux. Les deux notes jouées restent consonantes. Pythagore et ses élèves décident alors de construire leur gamme à partir de ces deux intervalles.

2) Construction de la gamme

On décide de s'intéresser aux notes comprises dans l'intervalle do_3 de fréquence 260,74 Hz et do_4 de fréquence double à 521,48 Hz.

On part du la_3 à 440 Hz. On augmente d'une quinte pure pour trouver un mi. Puisqu'on augmente d'une quinte, il faut multiplier la fréquence 440 par 3/2, c'est-à-dire 1,5. On trouve 660 Hz. Cette fréquence correspond bien à un mi mais est supérieures à 521,48 Hz donc ne se trouve pas dans l'intervalle (appelé octave 3) do_3-do_4. Il se trouve dans l'octave supérieure (c'est le mi_4). Il faut donc diviser par deux afin de redescendre d'une octave et se retrouver à 330 Hz correspondant au mi_3.

Pour trouver la note suivante selon les quintes ascendantes, on multiplie 330 par 1,5 en revenant, *éventuellement*, par une division par 2, dans l'octave 3 etc. Les notes obtenues par quintes ascendantes successives ont les noms suivants :

la mi si fa♯(fa dièse) do♯ sol♯ ré♯ la♯ mi♯ si♯ fa♯♯ do♯♯ sol♯♯ etc.

Les notes obtenues par quintes descendantes (donc en divisant les fréquences par 1,5 et en revenant, éventuellement, par une multiplication par 2, dans l'octave 3) ont les noms suivants :

la ré sol do fa si ♭(si bémol) mi ♭ la ♭ ré ♭ sol ♭ do ♭ fa ♭ si ♭ ♭ etc.

Déterminer dans le tableau toutes les fréquences (en Hz) des notes de l'octave 3, par étape (en commençant du la au centre du tableau) (certaines valeurs sont indiquées pour vous permettre de retomber sur vos pieds) :

mi ♭ ♭	si ♭ ♭	Fa ♭	do ♭	Sol ♭	Ré ♭	La ♭	Mi ♭	Si ♭	fa	do	sol	ré
				366,25					347,65			

la	mi	si	fa♯	do♯	sol♯	ré♯	la♯	mi♯	si♯	fa♯♯	do♯♯	sol♯♯
440 Hz							469,86					

Puis classer ces 26 notes par fréquences croissantes :

Do_3												
260,74												

Remarque importante pour ceux que cela intéresse.

Vous avez fait le travail pour trouver 26 notes différentes ; en réalité, on pourrait continuer et on ne retomberait jamais sur la note de référence la_3 : la série ne forme pas une boucle. Ce résultat très important provient du fait que si vous augmentez de n quintes pures, vous ne trouverez jamais un nombre entier m d'octaves. Mathématiquement, cela se traduit par le fait que il n'existe pas d'entiers naturels n et m tels que $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$. La démonstration de ce résultat sort des limites de ce cours mais vous pouvez demander à votre professeur de mathématiques de vous l'expliquer.

3) Simplifications

Comme vous l'avez compris, le nombre de notes dans la gamme pythagoricienne serait infini mathématiquement. En pratique, certaines fréquences sont tellement proches qu'on ne fait plus la différence entre les hauteurs des sons joués : il est inutile de garder tant de notes. Mais surtout, il serait illusoire de construire par exemple un piano avec autant de touche entre le do_3 et le do_4. Des simplifications ont été adoptées.

a) Gamme pythagoricienne pentatonique

Comme son nom l'indique, on ne se contente que de cinq notes : do-ré-mi-sol-la Donner la fréquence de ces notes par ordre croissant (les recopier du tableau précédent)

do_3	$ré_3$	mi_3	sol_3	la_3	do_4

Cette gamme est trop souvent restrictive, les mélodies sont trop pauvres.

b) Gamme pythagoricienne heptatonique

Elle comporte 7 notes par octave qui correspondent aux noms dans l'ordre que vous connaissez : do-ré-mi-fa-sol-la-si-(do). Donner la fréquence de ces notes par ordre croissant

do_3							do_4

Elle est souvent utilisée. Mais elle pose un sérieux problème lors de la transposition : il existe bien une quinte pure entre do et sol par exemple mais pas entre fa et une des notes de l'octave n°4.

c) Gamme pythagoricienne majeure chromatique

Elle comporte 12 notes : mi ♭ - si ♭ - fa - do - sol - ré - la - mi - si - fa♯ - do♯ - sol♯ à remettre dans l'ordre croissant de fréquences :

do_3												do_4

Elle possède beaucoup plus de quintes que la précédente. Néanmoins, elle a un terrible défaut : une des quintes sonne extrêmement faux, on dit qu'elle hurle, elle est appelée quinte du loup et est bien connue des musiciens car elle est injouable. Avec le choix de ces notes, cette quinte se situe entre sol♯$_3$ et mi ♭$_4$.

Calculer la fréquence de mi ♭$_4$ à partir de la fréquence de mi ♭$_3$:

Calculer alors le rapport de fréquence correspondant à la quinte ascendante entre sol♯$_3$ et mi ♭$_4$:

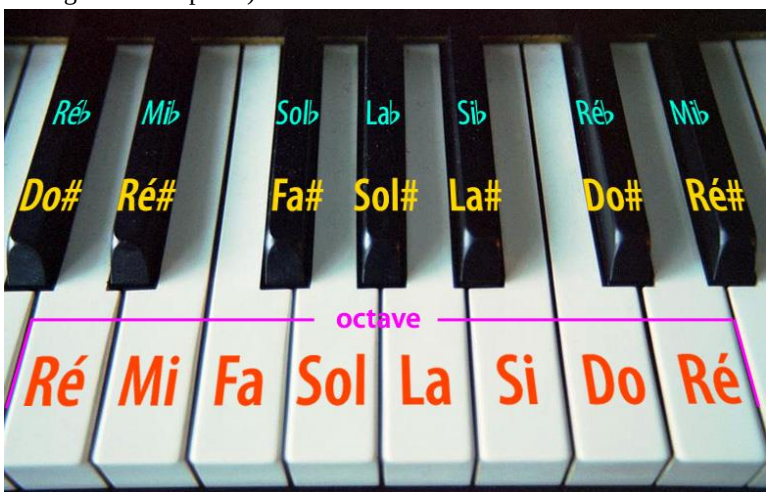
Calculer alors l'intervalle de différence entre une quinte pure et une quinte du loup en faisant le rapport de la plus grande sur la plus petite pour montrer que ces quintes ne sont pas égales.

Cet intervalle est nommé « comma pythagoricien ». Vérifier qu'il vaut exactement 531441/524288.

Montrer que ce rapport a une erreur relative par rapport à la valeur 1 de plus de 1% :

Cette quinte est donc inutilisable. Il faut créer une partition qui évite de l'utiliser.

Remarque : les pianos possèdent bien douze touches pour chaque octave. Les dièses et bémol sont les touches noires du clavier et pour le piano, on confond par exemple ré bémol et do dièse mais en faisant ceci, le piano n'est pas accordé suivant la gamme de Pythagore et ses quintes sont toutes légèrement fausses (voir paragraphe sur la gamme tempérée) :

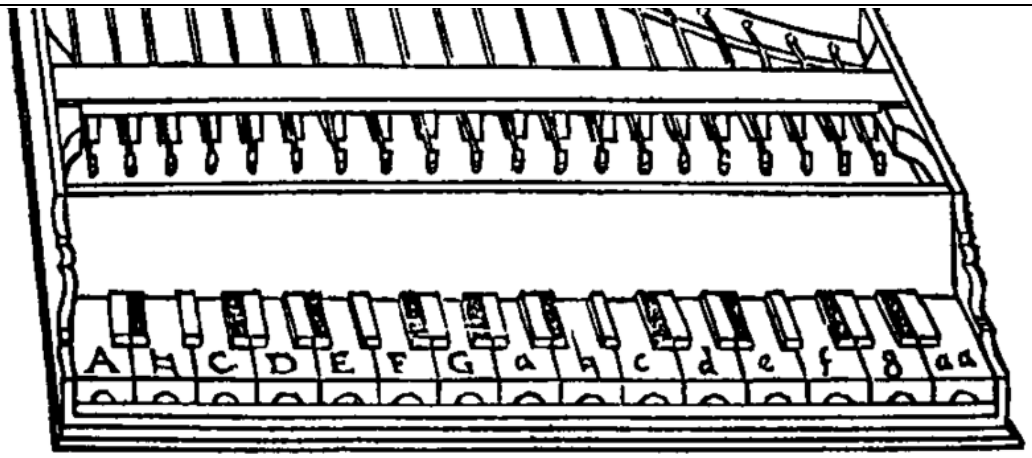


d) Gamme pythagoricienne à 19 degrés

Elle possède 19 notes :do ♭ - sol ♭ - ré ♭ - la ♭ - mi ♭ - si ♭ - fa - do - sol - ré - la - mi - si - fa♯ - do♯ - sol♯ - ré♯ - la♯ - mi♯. Les remettre dans l'ordre par ordre croissant de fréquences :

do_3																			do_4

Certains clavecins ont été construits avec 19 touches par octave : <u>on distingue les dièses et les bémols</u>. Ces instruments ne sont guère utilisés et sont présentés dans les musées.



Clavier à 19 touches par octave imaginé par Zarlino, distinguant dièses et bémols (la note A correspond au la puis ensuite c'est par ordre alphabétique dans la dénomination anglo saxone des notes, le do correspondant à C puis c).

Mais les instrumentistes comme les violonistes ou violoncellistes ajustent avec leur doigt la partie vibrante de leur corde pour différencier le do dièse et le ré bémol par exemple afin de jouer des quintes justes. Notez d'ailleurs que dans cet ordre, dans la gamme de Pythagore, on trouve do puis ré bémol, puis do dièse puis ré. Sur le schéma précédent, entre le D et le d, donner le nom des notes correspondantes utilisées dans cette gamme pour chaque note du clavier.

Déterminer l'intervalle entre ré bémol et do dièse (rapport des fréquences…) :

Quel intervalle retrouve-t-on, bien connu des musiciens jouant d'un instrument comme le violon ?

III Gamme de Zarlino ou gamme des physiciens

1) Principe de construction

Alors que les Grecs ne construisent leur gamme de proche en proche qu'avec l'octave et la quinte juste, au Moyen-âge, avec la musique vocale polyphonique, apparaît un autre intervalle très important consonant : la tierce majeure. Le rapport de fréquence correspondant est 5/4.

Pourquoi octave (rapport 2/1), quinte (3/2), quarte (4/3) puis tierce majeure (5/4) sont-ils si consonants ? Les anciens (avant XIXème pensaient à la toute puissance mathématique : ces fractions correspondent à la suite des rapports (n+1)/n en faisant varier n. Au XIXème siècle, avec Fourier et sa décomposition d'un son complexe en son sinusoïdal, on a une explication beaucoup rationnelle du phénomène. Rappeler le théorème de Fourier sur cette décomposition d'un son complexe :

Placer sur un axe gradué, par exemple en utilisant f_1 = 440 Hz, les fréquences des différents harmoniques jusqu'au sixième.

Déterminer alors les intervalles ascendants entre deux harmoniques consécutifs (rapports de fréquence) : quelle suite retrouvez-vous ?

Le son d'une corde pincée contient en général tous les harmoniques donc l'oreille, dès l'enfance, lorsqu'elle entend un son, entend en général de façon indirect, avec tous les harmoniques présents, l'octave (intervalle entre le 1^{er} et $2^{ème}$ harmonique), la quinte (intervalle entre le $2^{ème}$ et le $3^{ème}$ harmonique), la quarte (intervalle entre le $3^{ème}$ et le $4^{ème}$ harmonique), la tierce majeure (entre le $4^{ème}$ et le $5^{ème}$ harmonique). L'accord parfait majeur constitué d'une tierce majeure, d'une quinte et d'une octave sonne donc particulièrement juste.

Gioseffo Zarlino essaie, ainsi, dans sa gamme, de favoriser les intervalles correspondant à des fractions simples. Sa gamme possède 12 notes correspondant aux noms de la gamme pythagoricienne chromatique ou bien à ceux de la gamme pythagoricienne à 19 degrés en confondant les notes très proches. On obtient la suite de notes suivantes *avec l'intervalle par rapport au do du même octave* indiqué juste en dessous :

Note	***do***	***do♯=ré♭***	***ré***	***ré♯=mi♭***	***mi***	***fa***	***fa♯=sol♭***	***sol***	***sol♯=la♭***	***la***	***la♯=si♭***	***si***
Rapport	1/1	16/15	9/8	6/5	5/4	4/3	45/32	3/2	8/5	5/3	9/5	15/8

Entre le do et quelle note trouve-t-on une quinte juste ?
une quarte juste ?
une tierce majeure juste ?

A partir du tableau précédent, déduire la fréquence de toutes les notes de l'octave n°3 de la gamme de Zarlino en respectant la valeur de 440 Hz pour le la_3. Note : on commencera par calculer la fréquence du do_3 pour en déduire toutes les autres par la suite.

do_3									la_3			do_4
									440 Hz			

Le nom de certains autres intervalles sont donnés dans le document suivant pour ceux intéressés :

- Fondamentale = *do* = 1
- Ton majeur = do-*ré* = 9/8 (deux quintes pures transposées d'une octave : 3/2 × 3/2 ÷ 2)
- Tierce mineure = do-mi♭ = 6/5
- Tierce majeure = do-mi= 5/4 (contrairement à 81/64, soit 4 quintes, selon Pythagore)
- Quarte = do-*fa* = 4/3 (comme pour Pythagore)
- Quinte = do-*sol* = 3/2 (comme pour Pythagore)
- Sixte (majeure) = do-*la* = 5/3 (addition d'une tierce majeure et d'une quarte : 5/4 x 4/3 = 5/3 - contrairement à 27/16 selon Pythagore)
- Septième (majeure) = do-*si* = 15/8 (addition d'une tierce majeure et d'une quinte: 5/4 x 3/2 = 15/8, contrairement à 243/128 selon Pythagore)
- Octave = do-*do* = 2.

2) Avantages et inconvénients de la gamme de Zarlino

Par ses intervalles avec leurs valeurs simples, la gamme de Zarlino sonne harmonieusement : **les harmoniques de certaines notes se recouvrent avec les harmoniques d'autres notes ce que l'oreille apprécie énormément :**

Donner la fréquence des 8 premiers harmoniques du do_3 en gamme de Zarlino :

Donner la fréquence des 8 premiers harmoniques du mi_3 en gamme de Zarlino :

Donner la fréquence des 8 premiers harmoniques du sol_3 en gamme de Zarlino :

Quelles harmoniques se recouvrent ainsi en jouant un do_3 et un mi_3 ? un do_3 et un sol_3 ? etc.

Mais elle possède un très gros défaut : sur un instrument à clavier, la transposition n'est pas possible. Imaginons qu'on veuille transposer du ton de do au ton de sol (sol devient le fondamentale du tableau précédent et on décale alors tous les intervalles : on trouvait un intervalle de 9/8 entre le do et le ré, maintenant on veut trouver cet intervalle de 9/8 entre le sol et le la puisqu'on a tout décalé). Montrer sur un seul exemple que les intervalles ne sont alors plus respectés : montrer par exemple que la fréquence du la, après transposition, ne vaut plus 440 Hz si on respecte un intervalle de 9/8 entre sol et la.

La transposition n'est donc pas possible avec la gamme de Zarlino.

IV Le tempérament égal ou gamme tempérée

C'est Jean-Sébastien Bach qui en est le précurseur dans son ouvrage « le clavier bien tempéré » en 1722. Dans la gamme tempérée, on ne garde que 12 notes (on confond do dièse et ré bémol etc.) comme celles de la gamme de Zarlino. Son grand avantage, c'est qu'on fixe la fréquence des notes de manière à ce que toute transposition ne pose aucun problème. Pour cela, c'est très simple : l'intervalle noté i et appelé « demi-ton » entre deux notes consécutives de la gamme doit rester le même (i = rapport des fréquences de deux notes consécutives dans la gamme tempérée). Ainsi, quand on passe du do_3 au do_4, on passe par 12 « demi-tons » i identiques entre deux notes consécutives.

Donc exprimer $f(do_4)$ en fonction de $f(do_3)$ et de i :

Rappeler par ailleurs qu'entre do_3 et do_4, il y a une octave, donc $f(do_4)$ =

En déduire une équation que doit satisfaire l'intervalle i :

On dit que i est la racine $12^{ème}$ de 2. On note $i = 2^{1/12}$ (« 2 à la puissance un douzième »).
Calculer i à la calculatrice en utilisant le chapeau circonflexe de votre machine : i =

En déduire alors les fréquences de toutes les notes, en gamme tempérée, de l'octave 3 en imposant toujours la fréquence du la_3 à 440 Hz :

do_3									la_3			do_4
									440 Hz			

Montrer que la quinte $do_3 – sol_3$ n'est pas juste :

Montrer que la tierce $do_3 – mi_3$ n'est pas une tierce majeure juste non plus :

Quel avantage possède cependant la gamme tempérée ?

V Comparaison des trois gammes

1) Les trois tierces

Sur les paillasses du fond de la salle, dès qu'il y a une place (sinon passer au 2)), utiliser les deux haut-parleurs reliés aux deux générateurs pour créer (reportez vous à vos tableaux de valeurs de fréquence) :

- une tierce juste (do_3 et mi_3 joués ensemble) de la gamme de Gioseffo Zarlino
- puis la même tierce dans la gamme de Pythagore
- puis la même tierce dans la gamme tempérée.

Si vous avez une très bonne (excellente) oreille, vous serez capable de les différencier.

2) En quelle gamme joue la flûte ?

On possède un enregistrement de flûte jouant la gamme majeure do-ré-mi-fa-sol-la-si-do. Cet enregistrement fonctionne non pas avec audacity mais avec le module regavi de regressi :

- Ouvrir, dans Regressi le module Regavi en passant par le menu des programmes.
- Dans l'option lecture d'un fichier.wav, ouvrir le fichier indiqué par le professeur au tableau correspondant à la gamme jouée par la flûte.
- Pour chaque note, sélectionner une tranche d'une durée d'environ 100 ms et *la sauver sous Regressi (icône avec une petite flèche et un R), **sur une nouvelle page (afin d'avoir 8 pages d'un même fichier regressi et non 8 fichiers)**, avec son nom comme seul commentaire (do, ré, mi, fa etc.).*
- Pour chaque note, dans Regressi, choisir le mode Spectre (icône Fourrier ressemblant à un spectre) avec l'option graphe temporel. Vous passez d'une page à l'autre (donc d'une note à l'autre) grâce aux flèches bleues de la barre des tâches dans regressi.
- Pour chaque note de la gamme, utiliser le curseur données ou réticule sur le spectre pour mesurer *le plus précisément possible* la fréquence de la note jouée par la flûte et remplir le tableau suivant. Pour des raisons de commodité, dans la barre d'outils, choisir, dans Fenêtre, mosaïque verticale afin d'avoir côte à côte le graphique donnant l'allure du signal et le spectre dans une autre fenêtre.

do_3							do_4

Question : dans quelle gamme joue donc cette flûte ?

Docs (à ne pas imprimer)

Fréquences des notes dans 3 systèmes, *la*=440 Hz

Note	Juste intonation	Gamme de Pythagore	**Gamme tempérée**
do	264,00	260,74	**261,63**
do♯	275,00	278,44	**277,18**
ré	297,00	293,33	**293,66**
mi♭	316,80	309,03	**311,13**
mi	330,00	330,00	**329,63**
fa	352,00	347,65	**349,23**
fa♯	371,25	371,25	**369,99**
sol	396,00	391,11	**392,00**
sol♯	412,50	417,66	**415,30**
la	**440,00**	**440,00**	**440,00**
si♭	475,20	463,54	**466,16**
si	495,00	495,00	**493,88**
do	528,00	521,48	**523,25**

Rapports, fréquences et cents pour la gamme pythagoricienne majeure

Note	**Rapport avec *do***	**Fréquence pour *la* = 440 Hz**	**Cents**	**Cents gamme tempérée**
do	1/1 (1,000)	260,74	0	0
ré ♭	256/243 (1,053)	274,69	90	100
do♯	2187/2048 (1,068)	278,44	114	
ré	9/8 (1,125)	293,33	204	200
mi ♭	32/27 (1,185)	309,03	294	300
ré♯	19683/16384 (1,201)	313,24	318	
mi	81/64 (1,266)	330,00	408	400
fa	4/3 (1,333)	347,65	498	500
sol ♭	1024/729 (1,405)	366,25	588	600
fa♯	729/512 (1,424)	371,25	612	
sol	3/2 (1,500)	391,11	702	700
la ♭	128/81 (1,580)	412,03	792	800
sol♯	6561/4096 (1,602)	417,66	816	
la	27/16 (1,688)	**440,00**	906	900
si ♭	16/9 (1,778)	463,54	996	1000
la♯	59049/32768 (1,802)	469,86	1020	
si	243/128 (1,898)	495,00	1110	1100
do	2/1 (2,000)	521,48	1200	1200

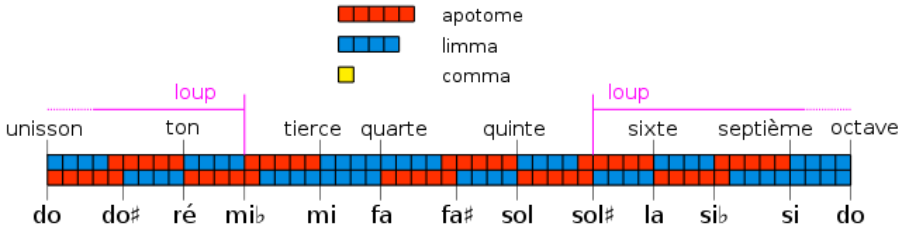
apports ramenés dans l'intervalle [1 ; 2] et triés

Quintes	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	**12**
Rapports	1	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$	$3/2$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	**2**
Écarts	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$	$3^7/2^{11}$	$2^8/3^5$		$2^8/3^5$

Nom des notes

Quintes	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	12
Rapports	1	$3^7/2^{11}$	$3^2/2^3$	$3^9/2^{14}$	$3^4/2^6$	$3^{11}/2^{17}$	$3^6/2^9$	$3/2$	$3^8/2^{12}$	$3^3/2^4$	$3^{10}/2^{15}$	$3^5/2^7$	**2**
Écarts	apo.	lim.	apo.	lim.	apo.	lim.	lim.	apo.	lim.	apo.	lim.	lim.	
Noms	do	do♯	ré	ré♯	mi	fa	fa♯	sol	sol♯	la	la♯	si	do

Il est possible de représenter une gamme pythagoricienne particulière en mettant les apotomes et les limmas les uns à la suite des autres selon les intervalles obtenus, le limma étant plus court que l'apotome d'un comma.



Le diagramme ci-dessus propose une approximation en donnant à l'apotome une valeur de 5 commas, et au limma une valeur de 4 commas. Cette commodité donne à l'octave une valeur 53 commas (5 apotomes + 7 limmas = 5 * 5 + 7 * 4 commas). Or, les 53 commas dépassent légèrement le rapport d'octave :

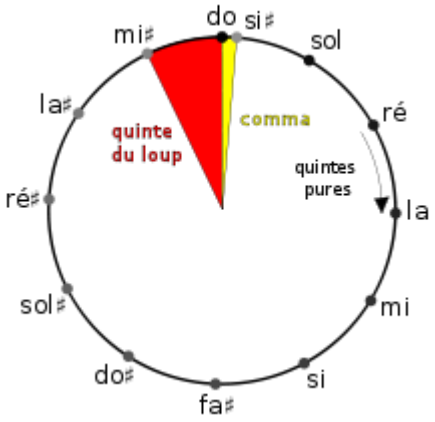
$$(\frac{3^{12}}{2^{19}})^{53} \approx 2,0507$$

Si on considère le tableau suivant qui donne les rapports des intervalles valant de 1 à 9 commas (en valeur approchée) :

Commas	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Rapports	1,013	1,027	1,041	1,056	1,070	1,085	1,100	1,115	1,130

on peut choisir les approximations suivantes :
le ton, qui vaut exactement 9/8 = 1,125, s'approche le plus des 9 commas,
l'apotome, qui vaut exactement $3^7/2^{11}$ soit environ 1,068, s'approche le plus des 5 commas,
le limma, qui vaut exactement $2^8/3^5$ soit environ 1,054, s'approche le plus des 4 commas.
Le « comma de Holder » divise exactement 53 fois l'octave. Ce comma, qui vaut environ 22,6415 cents, est très proche du comma pythagoricien. Il est à la base d'un tempérament par division multiple.

Le rapport de la quinte du loup se calcule en enlevant 11 quintes justes aux 7 octaves considérées :

$$\frac{2^7}{\frac{3^{11}}{2^{11}}} = \frac{2^{18}}{3^{11}} \approx 1,480$$

, à comparer avec 1,5 pour une quinte juste.