Préparation au CG - Equations différentielles simples, fonction exponentielle

I Définitions générales

On ne considère que des fonctions à valeur dans R.

Une **équation différentielle d'ordre 1** est une équation liant une fonction (d'une variable notée x dans ce qui suit) notée y et sa dérivée première notée y'.

Elle est **linéaire** si elle se met sous la forme a(x)*y'(x) + b(x)*y(x) + c(x) = 0 symbolisée en ay' + by + c = 0, où a, b et c sont des fonctions de la variable x connues, a(x) n'étant pas la fonction identiquement nulle.

Elle est **homogène** si la fonction c est la fonction nulle ; elle se met alors sous la forme ay' + by = 0

Elle est **à coefficients constants** si les fonctions a,b et c sont des constantes de R avec a non nulle.

Résoudre une équation différentielle consiste à trouver l'ensemble des fonctions y (à valeur dans R dans ce qui suit) vérifiant cette équation différentielle.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques et biologiques, par exemple pour l'étude de la radioactivité, de la cinétique chimique ou de la mécanique céleste... Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

II Cas d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène à coefficient constant

Il s'agit des équations du type y' - ky = 0 c'est-à-dire encore y' = ky avec k réel (fixé).

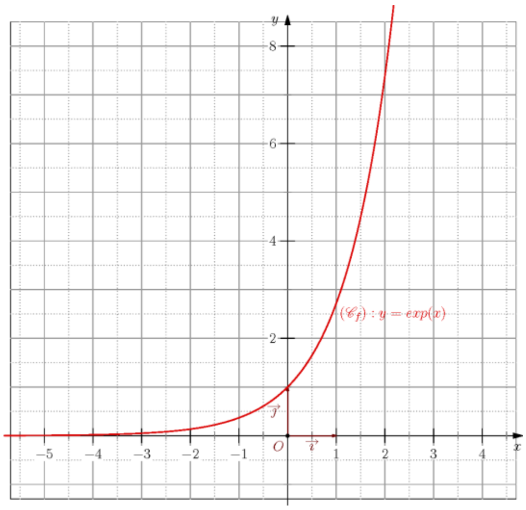
1) Cas où k = 1

a) Fonction exponentielle

L'équation différentielle y' = y admet comme solutions une famille de fonctions dérivables sur R dont l'une est particulièrement étudiée et utilisée, c'est celle qui prend la valeur 1 en 0. Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée, dans un premier temps exp(x).

On démontre les propriétés suivantes :

- exp(0) = 1 de par sa définition ;
- exp(1) = e ou e est un nombre irrationnel appelé « eu » ou « petit eu » et dont une valeur approchée est 2,718. Notons tout de suite que e^{-1} (= 1/e) = 0,37 et 1 - 1/e = 0,63 (valeurs à connaître)
- $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$
- exp(a)*exp(b) = exp(a+b)
- $(\exp(x))^n = \exp(nx)$, n de Z ; en particulier $(\exp(x))^{-1} = \exp(-x)$ et $\exp(n) = (\exp(1))^n = e^n$



De ces propriétés, on adopte la notation suivante : exp(x) = e^x ; avec cette notations, les propriétés algébriques précédentes de la fonction exponentielle se traduisent comme les règles de calculs sur les exposants déjà connues.

La fonction exponentielle f :

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & e^x \end{array}$$

est continue et strictement croissante de R vers R^{+*} (elle assure donc une bijection de R dans R^{+*})

La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de cette fonction est donnée ci-contre.

b) Résolution générale de y' = y

Les fonctions dérivables sur R qui sont solutions de y' = y sont du type

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & Ae^x \end{array}$$

où A est une constante de R

En physique, A est trouvé par une condition comme une condition initiale si la valeur de y(x) est connue en 0.

2) Cas où k appartient à R (cas général)

Les fonctions y dérivables sur R vérifiant y' = ky où k est un réel, sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & Ae^{kx} \end{array}$$

où A est une constante de R

Notamment, si y(0) = H (valeur connue), alors on doit avoir $y(0) = Ae^0 = A*1 = A$ et y(0) = H donc A = H et y s'écrit $y(x) = H\,e^x$

II Cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant

Il s'agit des équations du type ay' + by +c =0 c'est-à-dire encore y' + (b/a) y + c/a = 0, a b et c étant des constantes de R^*.

1) Dans un premier temps, on doit trouver une fonction j(x) qui est solution particulière de l'équation différentielle

Cette fonction à trouver demande souvent « du flair ». Dans ce cas simple du premier ordre avec des coefficients constants, on peut faire la conjecture simple qu'une fonction constante du type j(x) = J est solution particulière (on pourrait conjecturer plus généralement à une fonction polynomiale). Il s'agit de trouver j(x) donc ici J. On a alors j(x) = J, constante ; et donc j'(x) = 0

j(x) est solution de l'équation différentielle donc aj'(x) + bj(x) + c = 0

soit (comme j(x) = J et j'(x) = 0) a*0 +b*J + c = 0 donc J = -c/b

La fonction j(x) = -c/b est une fonction solution particulière de l'ED à coeff constants ay' + by +c = 0

2) On résout ensuite l'équation homogène associée y' + (b/a) y = 0 en s'aidant du I

Cela donne l'ensemble des fonctions :

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & Ae^{(-b/a)x} \end{array}$$

où A est une constante de R

3) Résolution finale

Pour trouver l'ensemble des fonctions cherchées, on somme la solution particulière de l'ED avec la solution générale de l'ED homogène associée. On trouve ainsi que les fonctions y dérivables sur R vérifiant ay' + by +c =0, a b et c étant des constantes de R^*, sont les fonctions

$$\begin{array}{ccc} R & \rightarrow & R \\ x & \rightarrow & -c/b + Ae^{(-b/a)x} \end{array}$$

où A est une constante de R

Il ne s'agit pas d'apprendre ce résultat par cœur mais de le retrouver avec le raisonnement complet du II

La constante A se détermine à partir d'une condition physique connue, souvent la condition initiale c'est-à-dire à partir la valeur y(0) qui est connue. A vaut dans ce cas c/b + y(0) (à démontrer, facile).

III Quelques équations à connaître en physique et à savoir représenter avec certaines propriétés

1) Quelques propriétés de la fonction f(t) = A e^{-at} avec A et a des constantes réelles positives non nulles.

Propriétés de cette fonction à démontrer (et à apprendre par cœur)

On a l'habitude en physique de noter τ (lettre « tau » grecque) la valeur de 1/a. Ainsi, la fonction s'écrit : f(t) = A $e^{-t/\tau}$

On étudie toutes les fonctions sur R^+

- f(0) = ……..
- La fonction f est décroissante

Démonstration :

- $\lim_{t \to \infty} f(t) =$ ……..
- A t = τ, f(t) = 0,37 A

Démonstration :

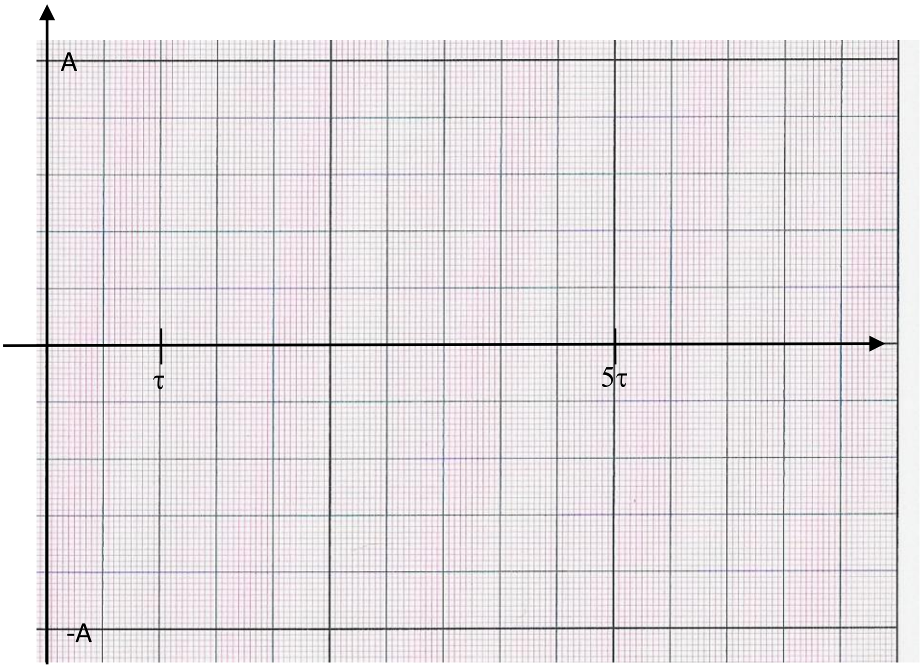
- A t = 5 τ, f(t) < 0,01 A

Démonstration :

- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en t=0 coupe l'asymptote (en l'infini, ici l'axe des abscisses) en un point d'abscisse τ.

Démonstration :

Représentation graphique de f : courbe $\mathscr{C}_f$ en bleu (à tracer) en faisant apparaître trois points intéressant de la courbe et la tangente à l'origine.



2) Autres fonctions dérivées

a) g(t) = - A e^{-at}

On remarque que g(t) = – f(t) donc la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g est ………………… …………….. …………. … …. …. …………………… …………… ………………. de la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f. Dessiner $\mathscr{C}_g$ en vert sur le graphique précédent en faisant apparaître trois points intéressants de la courbe et la tangente à l'origine.

b)h (t) = A (1 – e^{-at})

On remarque que h(t) = A + g(t) donc la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h est ………………… …………….. …………. … …. …. …………………… …………… ………………. de la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. Dessiner $\mathscr{C}_h$ en rouge sur le graphique précédent en faisant apparaître trois points intéressants de la courbe, la tangente à l'origine et l'asymptote en l'infini.

c) i(t) = -A (1 – e^{-at})

On remarque que i(t) = – h(t) donc la courbe représentative $\mathscr{C}_i$ de la fonction i est ………………… …………….. …………. … …. …. …………………… …………… ………………. de la courbe $\mathscr{C}_h$ de la fonction h. Dessiner $\mathscr{C}_i$ en noir sur le graphique précédent en faisant apparaître trois points intéressants de la courbe, la tangente à l'origine et l'asymptote en l'infini.