

CG – Séance du jeudi 29 janvier 2015- échanges thermiques

On considère une maison chauffée, la température initiale T_i à l'intérieur étant de 20°C et la température extérieure de $T_E = 0^\circ\text{C}$. L'extérieur est traité comme un vaste thermostat.

La maison est faite de matériaux isolants et, pour simplifier, on estime que le sol et le toit ont le même comportement thermique que tous les murs et fenêtres.

Les dimensions de la maison sont les suivantes : $L = 10$ m en longueur, $\ell = 5$ m en largeur et $h = 2,5$ m en hauteur (toit plat).

L'air interne a une capacité thermique volumique de $c_{\text{vol}} = 4.10^2 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$.

On admet que le flux d'énergie surfacique Φ_{surf} à travers les parois de la maison, à tout instant, est proportionnel à la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur et que le coefficient de proportionnalité K , appelé conductivité thermique des parois de la maison, est évalué à $12,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

A l'instant $t = 0$ s, on arrête le chauffage de la maison et on observe la valeur de la température intérieure notée T de la maison. On cherche de façon théorique, à obtenir la fonction $T(t)$.

1) Comprendre l'énoncé

a) Qu'est-ce qu'un thermostat ? Qu'en déduire sur la température extérieure de la maison ? Que dire de la température T en fonction du temps ? Pourquoi ?

b) Qu'est-ce qu'un flux d'énergie surfacique ? Faire un schéma correspondant à cette notion. Quelle est son unité dans le système international (Rappel : une énergie est donnée en Joules) ? Que signifie que $K = 12,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$? Que pensez-vous du modèle adopté pour le flux surfacique (proportionnel à ...) ? En déduire une expression entre Φ_{surf} , K , T et T_E .

c) Comment comprenez-vous la valeur de $c_{\text{vol}} = 4.10^2 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ (faire une phrase simple) ?

2) Mise en équation du système

On nomme $E(t)$ et $E(t+\Delta t)$ l'énergie thermique (due à la plus ou moins grande température) de l'air à l'intérieur de la maison aux dates t et $t+\Delta t$ où $\Delta t > 0$ est une durée assez courte. La température est passée de $T(t)$ à $T(t+\Delta t)$.

a) Comparer $T(t)$ et $T(t+\Delta t)$.

b) Quel lien existe-t-il entre $\Delta E = E(t+\Delta t) - E(t)$ et $\Delta T = T(t+\Delta t) - T(t)$?

c) Quel lien existe-t-il entre $\Delta E = E(t+\Delta t) - E(t)$ et le flux d'énergie vers l'extérieur de la maison ? Et donc entre ΔE et Φ_{surf} ? Puis entre ΔE et $(T - T_E)$?

d) En déduire que $\frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} (T - T_E)$ où τ est une constante que l'on trouvera en fonction de K , L , ℓ , h , et c_{vol} .

Montrer que cette grandeur τ est bien un temps. La calculer.

e) La définition d'une dérivée est telle que, (par définition) $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} = \frac{dT}{dt}(t)$. Que devient l'équation précédente du d) lorsqu'on prend une valeur de Δt infiniment faible ?

3) Résolution

a) Déterminer l'expression complète de $T(t)$ à partir de l'équation différentielle précédente. On trouvera dans un premier temps une solution particulière sous la forme d'une constante puis on résoudra l'équation homogène associée et on déterminera enfin l'équation finale en déterminant la constante qui apparaît avec une condition imposée par le système. On pourra s'assurer de la cohérence de l'expression trouvée au final.

b) Donner le graphique correspondant en faisant visualiser droites et points importants.

c) Quelle est la température de la maison après 2h d'arrêt de chauffage ? (cela serait la première question du problème dans le supérieur...).

d) Au bout de combien de temps parviendra-t-elle à la valeur de 10°C ?

4) Faire des économies

a) Déterminer l'expression du flux surfacique en fonction du temps à partir de l'expression de $T(t)$.

b) On veut éviter toute baisse de la température, maintenant, à partir de $t = 0$ s. Quelle puissance doit avoir la chaudière de la maison pour permettre cela ?

c) Même question mais pour une température gardée à 18°C . Quelle économie de chauffe faites-vous sur 24h avec un prix du kWh de 13 centimes d'euros ?

d) Même question pour une température gardée à 22°C . Commenter.