Séance 12 : proportion, pourcentage, proportionnalité, 3ème partie

III Proportionnalité

1) Savoir calculer rapidement avec des fractions (rappels)

Pour b non nul,

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{a\times c}{b}$$

Pour b et c non nuls :

$$\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b}\div c=\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}=\frac{a}{b\times c}$$

Pour b, c, d non nuls :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow a\times d=b\times c \text{ (produit en croix) ; } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ (échange des "moyens")}$$

Pour tous a, b, c, d non nuls : (ne pas connaître par cœur mais savoir le retrouver rapidement)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{d}{c}=\frac{b}{a} \text{ (échange des "extrêmes")}$$

2) Tableau de proportionnalité et suites proportionnelles

Définition . Un tableau est un tableau de proportionnalité et présente deux suites de nombres proportionnelles si on passe d'une ligne à l'autre en multipliant ou en divisant par un même nombre.

Exemple :

6	8	14
9	12	21

$\downarrow\times 1,5 \qquad \uparrow\div 1,5$

3) Produit en croix et règle de trois en mathématiques

On suppose que les nombres a, b, c, d sont non nuls.

Si le tableau

a	c
b	d

est un tableau de proportionnalité alors on a (par cœur) :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \qquad a=\frac{b\times c}{d}. \qquad \boxed{a\times d=b\times c}$$

(règle de trois, par coeur) (produit en croix, par coeur)

Comment trouver une inconnue avec un tableau ?

Exemple :

12	x
8	20

on détermine x par $\frac{x}{20}=\frac{12}{8}$ $\quad x=\frac{20\times 12}{8}=\frac{4\times 5\times 2\times 6}{8}=5\times 6=30.$

4) Application concrète et unités

Dans un tableau de proportionnalité, très souvent les grandeurs inscrites ont une unité qu'il ne faut pas oublier. Soit chaque colonne a son unité, soit chaque ligne a son unité, tout dépend de la façon dont a été posé le tableau (au choix).

Exemple : 6 oeufs coûtent 1, 80 €. Combien coûtent 10 oeufs ?

On reconnaît une situation de proportionnalité. En effet le prix des œufs est proportionnel à leur nombre. On fait un tableau en précisant les unités.

Nombre d'œufs (en œufs)	6	10
Prix des œufs (en €)	1,8	x

La ligne de x correspond à des € donc le calcul donnera des €. Ici $\frac{x}{10}=\frac{1.8}{6}$ d'où $x=\frac{1,8\times 10}{6}=3$ €.

Exercice 12

Cinq familles occupent à tour de rôle un appartement de vacances, pendant : 20 jours pour la première, 12 jours pour la deuxième, 25 jours pour la troisième, 30 jours pour la quatrième et 18 jours pour la cinquième. Elles partagent les frais proportionnellement à la durée de leur séjour. Le coût total de la location s'élève à 14400 euros.

Calculer la dépense de chaque famille. On fera un tableau de proportionnalité complet pour s'aider.

Exercice 13

On veut réaliser une maquette du système solaire. Dans cette maquette à l'échelle, le Soleil (diamètre : 1,4 million de km) est représenté par un ballon de diamètre 35 cm. Utiliser des tableaux de proportionnalité pour répondre aux questions.

Planète	Terre	Saturne	Uranus
Diamètre (en km)	12756	120536	51118
Distance au Soleil (en millions de km)	150	1430	2871

1) Citer un objet qui pourrait représenter chacune de ces trois planètes dans cette maquette en justifiant.
2) Dans la maquette, à quelle distance du ballon doit-on placer l'objet représentant la Terre ?
3) Même question pour Saturne et pour Uranus.

5) Coefficient de proportionnalité

a) Définition

Considérons le tableau suivant :

Volume d'un échantillon de jus d'orange (mL)	50,0	150	200	500	$1{,}20.10^3$	$1{,}80.10^3$
Masse de sucre contenu dans l'échantillon (g)	5,40	16,2	21,6	54,0	129,6	194,4

On peut vérifier que c'est un tableau de proportionnalité : on passe de la première ligne à la seconde en multipliant toujours par le même nombre.

Si on appelle G_1 la grandeur d'une ligne et G_2 la grandeur d'une deuxième ligne, le coefficient permettant de passer de G_1 à G_2 est le coefficient de proportionnalité k qui permet, connaissant G_1, d'en déduire G_2 (attention au sens !) :

$G_2 = k \times G_1$ donc notamment $k = G_2/G_1$

Ici k = 5,40/50,0 = 16,2/150 = 21,6/200 = … = 0,108

Donc on peut écrire $G_2 = 0{,}108 \times G_1$ **en précisant bien que G_1 est en mL et G_2 en g**

Exercice 14 : utiliser le coefficient de proportionnalité

1) Sur l'exemple précédent, déterminer la masse de sucre dans un volume de $2{,}00.\ 10^3$ mL de jus.
2) Même question dans 43,0 L de jus.
3) Inversement, un échantillon du même jus de fruit possède une masse de 60,0 g de sucre. Quel est son volume ?
4) Dans l'exercice 12, déterminer le coefficient de proportionnalité permettant de calculer le prix du séjour connaissant sa durée.

Exercice 15

Voici les informations portées sur la fiche de péage d'autoroute d'un automobiliste :

Entrée à AAA : 12h38min Sortie à BBB : 14h15min Distance AAA-BBB : 226km

Cet automobiliste a-t-il respecté la limitation de vitesse sur autoroute ?

A savoir faire à l'issue de la séance 12 :

- Reconnaître des situations de proportionnalité et construire un tableau de proportionnalité qui s'y rapporte.
- Connaître les règles sur les suites proportionnelles
- Savoir reconnaître si deux suites sont proportionnelles
- Savoir trouver le coefficient de proportionnalité pour passer de G_1 à G_2 sans se tromper de sens.
- Déterminer la valeur une case d'un tableau de proportionnalité ayant 4 cases, les trois autres étant connues
- Faire attention aux unités dans les calculs et dans le résultat final

Les grosse bêtises à ne pas commettre à l'issue de la séance 12

- Se tromper lors du calcul de la 4ème case d'un tableau de proportionnalité à 4 cases
- Ne pas tenir compte des unités
- Calculer un coefficient de proportionnalité à l'envers